Jörg Nikutta
Lehrstuhl Prof. Moldovanu
nikutta@econ.uni-mannheim.de

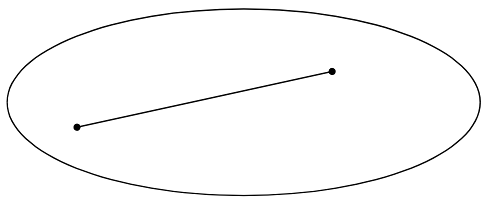
Wissenswertes über Konvexität

Konvexkombination (Linearkombination)

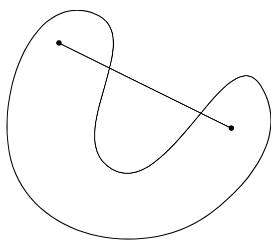
Eine Konvexkombination zweier Punkte beschreibt alle Punkte, welche auf dem verbindenden Geradenstück liegen. Man durchläuft das Geradenstück, indem ein Parameter λ von 0 nach 1 geht. Wenn man sich für $\lambda = 0$ im Punkt x und für $\lambda = 1$ in z befindet, dann ist man für $\lambda = \frac{1}{2}$ gerade auf der Hälfte. Für $\lambda = \frac{2}{3}$ ist man weiter an z als die Mitte, nämlich genau soviel, daß man bereits $\frac{2}{3}$ des Weges von x nach z zurückgelegt hat.
Formal: $x_{\lambda} := (1-\lambda)\,x + \lambda z$, $\lambda \in [0,1]$.

Konvexität einer Menge

Eine Menge ist genau dann konvex, wenn jede Konvexkombination zweier Punkte aus der Menge wieder in der Menge ist, d.h. wenn man sich zwei beliebige Punkte aus der Menge nimmt, muß auch die "Linie" zwischen diesen Punkten wieder ganz in der Menge sein.
Formal: M konvex genau dann, wenn für $x, z \in M$ auch $x_{\lambda} \in M$ für alle $\lambda \in [0,1]$.



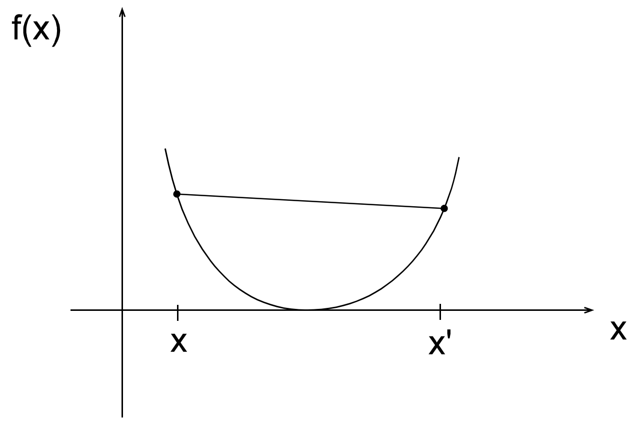
Eine konvexe Menge.



Eine nicht konvexe Menge.

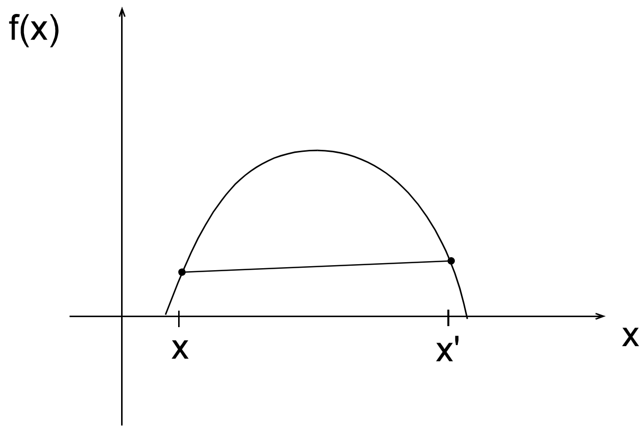
Konvexität einer Funktion

Eine Funktion f ist (streng) konvex, wenn die Konvexkombination zweier beliebiger Punkte des Graphen nicht unterhalb (oberhalb) des Graphen liegt.
Formal: $f\left((1-\lambda)\,x + \lambda x'\right) \leq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda f(x')$ für alle x, x'. Ein Beispiel für eine konvexe Funktion ist die Normalparabel $f(x) = x^2$.



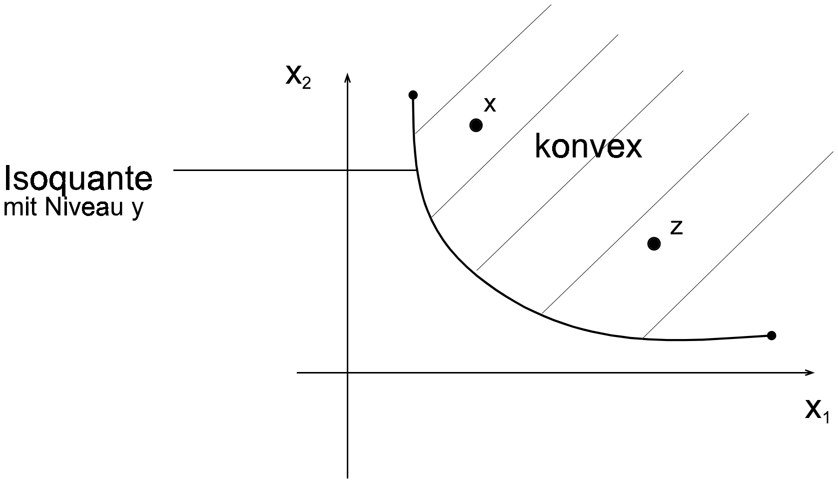
Eine konvexe Funktion.

Konkavität einer Funktion
Eine Funktion f ist (streng) konkav, wenn die Konvexkombination zweier beliebiger Punkte des Graphen nicht oberhalb (unterhalb) des Graphen liegt.
Formal: $f\left((1-\lambda)\, x + \lambda x'\right) \geq (1-\lambda)\, f(x) + \lambda f(x')$ für alle x, x'. Ein Beispiel für eine konkave Funktion ist die umgedrehte Normalparabel $f(x) = -x^2$.



Eine konkave Funktion.

Quasi-Konkavität
Eine (Produktions-) Funktion f heißt quasi-konkav, wenn die "Bessermengen" (upper contour sets) konvex sind, d.h. die Inputmenge durch die ein gegebenes Outputniveau mindestens erreicht wird, ist konvex.
Formal: Sei y ein gegebenes (Output-) Niveau. Seien weiterhin Inputvektoren x, z gegeben mit $f(x) \geq y$ und $f(z) \geq y$. f heißt quasi-konkav wenn dann auch $f\left((1-\lambda)\, x + \lambda z\right) \geq y$ für jedes $\lambda \in [0, 1]$ ist.

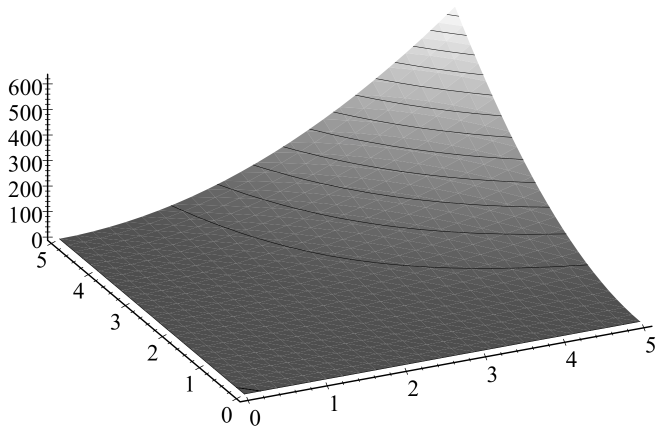


Isoquante wurde von einer quasi-konkaven Produktionsfunktion erzeugt.

Bemerkung:

- Jede konkave Funktion ist auch quasi-konkav.
- Jede konvexe Funktion ist auch quasi-konvex (Schlechtermengen sind konvex, also Gegenteil von quasi-konkav)

D.h. Eine streng konvexe Funktion kann nie streng quasi-konkav sein.
Es gibt quasi-konkave Funktionen, die nicht konkav sind: Beispiel $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$.



$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ ist nicht konkav, aber quasi-konkav.