Jörg Nikutta
Lehrstuhl Prof. Moldovanu
nikutta@econ.uni-mannheim.de

Ökonomischen Interpretation des Lagrange-Multiplikators λ

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda.$$

Der Lagrange-Muiltiplikator λ gibt an, wie sich im Optimum der Wert der Zielfunktion ändert, gegeben eine Änderung in der Konstanten der Nebenbedingung. λ heißt darum auch Schattenpreis.

Das Maximierungsproblem ist

$$\max f(x,y) \quad \text{s.t.} \quad g(x,y) = c$$

$(x^*(c), y^*(c))$ sei eine Lösung dieses Problem . Das c zeigt an, dass die optimale Lösung sicherlich von der gewählten Konstanten abhängt. Darum wird auch der optimale Funktionswert von c abhängen, also $f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$.
Unter der Annahme, dass $f^*()$ nach c differenzierbar ist, gilt

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \frac{df(x^*(c), y^*(c))}{dc} = \frac{f(x^*(c), y^*(c))}{dx}\frac{dx^*(c)}{dc} + \frac{f(x^*(c), y^*(c))}{dy}\frac{dy^*(c)}{dc}$$

Aus der "normalen" Lagrangemethode folgt $\frac{f(x,y)}{dx} = \lambda\frac{g(x,y)}{dx}$ und $\frac{f(x,y)}{dy} = \lambda\frac{g(x,y)}{dy}$. Dies eingesetzt ist obige Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{df^*(c)}{dc} &= \frac{df(x^*(c), y^*(c))}{dc} \\
&= \lambda\frac{g(x^*(c), y^*(c))}{dx}\frac{dx^*(c)}{dc} + \lambda\frac{g(x^*(c), y^*(c))}{dy}\frac{dy^*(c)}{dc} && (1)\\
&= \lambda\left(\frac{g(x^*(c), y^*(c))}{dx}\frac{dx^*(c)}{dc} + \frac{g(x^*(c), y^*(c))}{dy}\frac{dy^*(c)}{dc}\right). && (2)
\end{aligned}$$

Für die optimalen Werte $x^*(c)$ und $y^*(c)$ ist die Nebenbedingung per Konstruktion erfüllt und es gilt

$$g(x^*(c), y^*(c)) = c$$

für alle möglichen c. Dieses nun nach c abgeleitet ergibt

$$\frac{g(x^*(c), y^*(c))}{dx}\frac{dx^*(c)}{dc} + \frac{g(x^*(c), y^*(c))}{dy}\frac{dy^*(c)}{dc} = 1$$

In (2) eingesetzt folgt unmittelbar

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda$$

Achtung: Diese Beziehung gilt nur im Optimum (wenn also vorher nach x und y optimiert wurde) und λ hängt auch von dem gewählten c ab, also gilt $\lambda = \lambda(c)$.

Nachrechnen dieser Beziehung an einem Beispiel eines nutzenmaximierenden Konsumenten mit Cobb-Douglas Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ und Budgetbeschränkung:
Die optimale Nachfrage im Cobb-Douglas-Fall ist:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= a\frac{m}{p_1} \\
x_2^* &= (1-a)\frac{m}{p2}
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Nutzenfunktion ergibt sich $u^*(m) = \frac{a^a(1-a)^{1-a}}{p_1^a p_2^{1-a}}m$ mit der Ableitung nach m :

$$\frac{du^*(m)}{dm} = \frac{a^a(1-a)^{1-a}}{p_1^a p_2^{1-a}} \tag{3}$$

Andererseits ergibt sich aus dem Lagrange-Verfahren:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}}{\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{x_1^a \left(1-a\right) x_2^{-a}}{p_2}.$$

Im Optimum ist $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$ und einsetzen der optimalen Nachfragen liefert

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left(a\frac{m}{p_1}\right)^a \left(1-a\right) \left(\left(1-a\right)\frac{m}{p2}\right)^{-a}}{p_2} \\ &= \frac{a^a \left(1-a\right)^{1-a}}{p_1^a p_2^{1-a}} \end{aligned}$$

was das gleiche ist wie (3). Also gilt in diesem Beispiel

$$\frac{du^*\left(m\right)}{dm} = \lambda.$$

Bei dem Konsumenten gibt λ an, wie sich der Nutzen ändert (gegeben man ist im Optimum), wenn der Konsument ein wenig mehr Geld zur Verfügung hat.