Umdruck zur Vorlesung VWL II
(Prof. Dr. Thorsten Hens)

1 Was Sie schon immer über Konvexität, Konkavität und Quasi- Konkavität wissen wollten:

1.1 Wozu sind Konkavität und Quasi- Konkavität nütze?

Die Mikroökonomik basiert auf dem Rationalitätsprinzip, d.h. die Entscheidungsträger versuchen, gegeben gewisse Restriktionen, ihre individuellen Ziele möglichst gut zu realisieren. Mathematisch beschreibt man solch ein Verhalten durch Maximierungsprobleme unter Nebenbedingungen.

Beispiel:

Produzentenverhalten:

$$\max_{y,l\geq 0} py - wl \quad s.t. \quad y = T(l)$$

Konsumentenverhalten:

$$\max_{\substack{0\leq x\leq \bar{x}\\ 0\leq f\leq \bar{f}}} U(x,f) \quad s.t. \quad px + wf = b$$

Zur Berechnung der Lösungen dieser Maximierungsprobleme ist es recht angenehm, wenn man sich auf die Lösung eines Gleichungssystems beziehen kann. Die Gleichungssysteme sind die sogenannten Bedingungen 1. Ordnung, welche man z.B. als partielle Ableitungen einer sogenannten Lagrangefunktion erhält. In den obigen Beispielen lauten die Bedingungen 1. Ordnung:

$$(1) \qquad pT'(l) = w$$
$$(2) \qquad y = T(l)$$

bzw.

$$(1) \qquad \frac{\partial_x U(x,f)}{\partial_f U(x,f)} = \frac{p}{w}$$
$$(2) \qquad px + wf = b$$

Das Problem ist nur, wann man denn wirklich auf diese Weise vorgehen kann. Die häufigsten Fehler bei der Lösung der Maximierungsprobleme entstehen nicht etwa darin, daß man diese Gleichungssysteme nicht korrekt löst, sondern, daß man sie löst, auch wenn man dies besser nicht tun sollte, weil durch die Gleichungssysteme eben doch nicht das Maximierungsproblem gelöst wird.

Es treten folgende böse Fallen auf.

1. Problem: Randlösungen
Die mathematische Lösung der Gleichungssysteme (1), (2) erfüllt nicht die Randbedingungen $y \geq 0, l \geq 0$ bzw. $0 \leq \underline{x} \leq x$, $0 \leq f \leq \bar{f}$. In diesem Fall ist äußerste Vorsicht geboten und man macht sich die Lage der richtigen Lösung am besten anhand einer Skizze klar.

Beispiel:

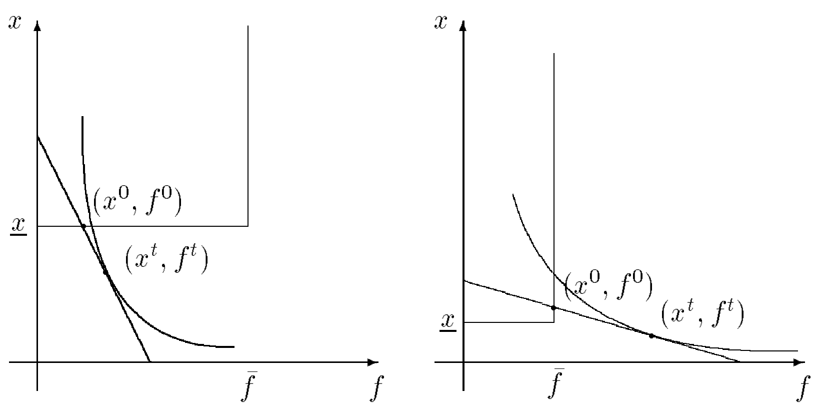
$$\max_{\substack{0 \leq \underline{x} \leq x \\ 0 \leq f \leq \bar{f}}} \alpha ln x + (1-\alpha) ln f \quad s.t. \quad px + wf = b$$

Die Bedingungen 1. Ordnung sind:

$$(1) \qquad \frac{\alpha f}{(1-\alpha)x} = \frac{p}{w}$$

$$(2) \qquad px + wf = b$$

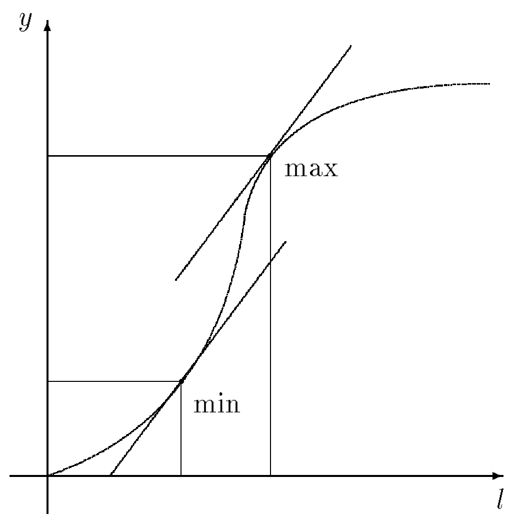
Die mathematische Lösung ist $x = \frac{\alpha b}{p}$, $f = \frac{(1-\alpha)b}{w}$. Doch, was ist, falls $\frac{\alpha b}{p} \leq \underline{x}$ oder $\frac{(1-\alpha)b}{w} > \bar{f}$ ist? Diese Fälle verdeutlichen die folgenden Skizzen:



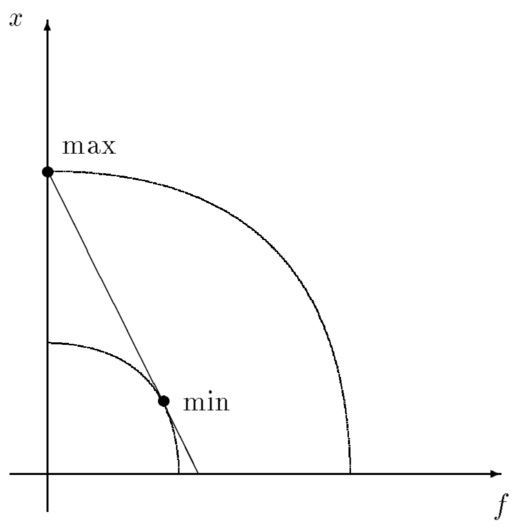
Im ersten Fall liegt die Lösung in dem Schnittpunkt der Budgetgeraden und dem durch $x = \underline{x}$ beschriebenen Rand der Konsummenge, im zweiten Fall in dem Schnittpunkt der Budgetgeraden und dem durch $f = \bar{f}$ beschriebenen Rand. In beiden Fällen ist die Lösung jedoch verschieden von den durch die Bedingung erster Ordnung (1) und (2) beschriebenen Tangentialpunkten (x^t, f^t).

2. Problem: Falsches Krümmungsverhalten der Funktionen.
Die Gleichungssysteme (1) und (2) beschreiben nicht etwa das Gewinn- bzw. das Nutzenmaximum, sondern das Minimum!

Beispiel: $T(l) \quad s - förmig:$



$U(x,f) = x^2 + f^2 \qquad (\underline{x} = 0, \bar{f} = \infty)$



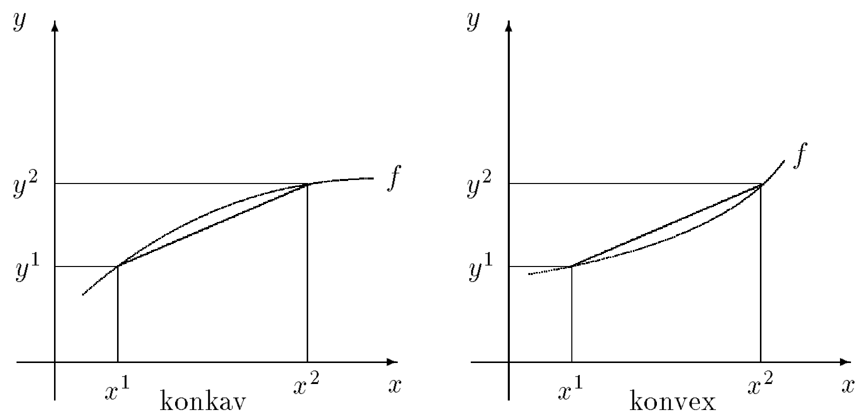
Um dieses Problem auszuschließen, überlegt man vor Anwendung der Lagrangemethode (d.h. bevor man das Gleichungssystem (1), (2) aufstellt, ob die Produktionsfunktion T konkav, bzw. die Nutzenfunktion U quasi- konkav ist. Denn dieses Krümmungsverhalten ist hinreichend dafür, daß die inneren Lösungen der Gleichungssysteme (1), (2) tatsächlich die Maximierungsprobleme lösen. Und was das Krümmungsverhalten mathematisch bedeutet, erklärt der nächste Teil dieses Umdrucks.

1.2 Eindimensionale Funktionen:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion einer Variablen, sagen wir mal

$$y = f(x).$$

f heißt konkav (konvex), falls die Sekante zu je zwei beliebigen Punkten $(x^1, y^1), (x^2, y^2)$ nicht oberhalb (nicht unterhalb) das Graphen der Funktion f liegt, d.h. graphisch:



algebraisch:

$$\begin{array}{lllll} f \; konkav & \Leftrightarrow \forall_{x^1,x^2} \; ist & f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) & \geq & \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \\ \quad konvex & & & \leq & \end{array}$$

für alle $\lambda \in [0, 1]$.

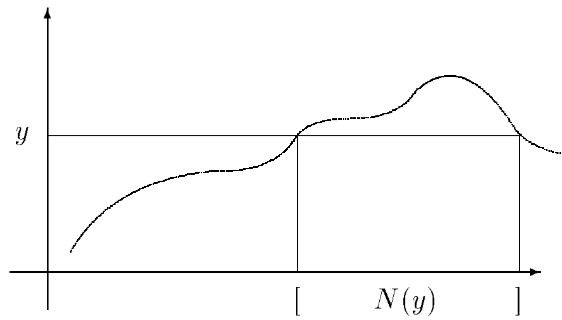
Man beachte: Ist f konvex, so ist $-f$ konkav, also z.B. ist $f(x) = x^2$ konvex und $f(x) = -x^2$ konkav. f heißt strikt konkav (strikt konvex), falls die Sekante immer echt unterhalb (echt oberhalb) liegt, d.h. die obigen Ungleichungen strikt gelten.

Beispiele:

$f(x) = \ln x$ strikt konkav

$$f(x) = x^\rho \text{ ist für } \rho = \begin{cases} \rho < 0 & \text{strikt konvex} \\ 0 < \rho < 1 & \text{strikt konkav} \\ \rho > 1 & \text{strikt konvex} \end{cases}$$

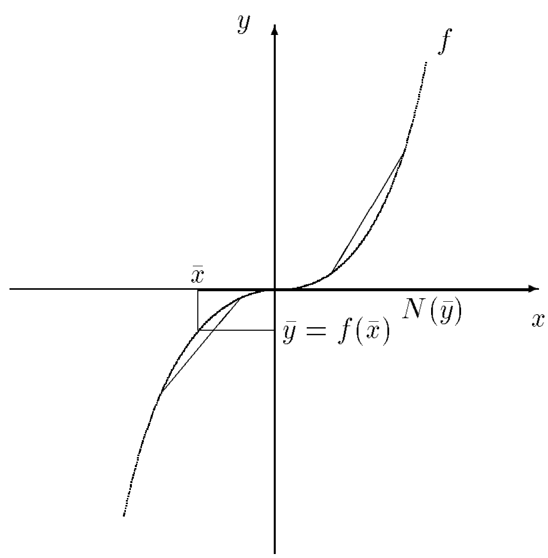
f heißt quasi-konkav, falls für alle $y \in \mathbb{R}$ die Niveaumengen $N(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq y\}$ nicht konkav sind. Analog, heißt f strikt quasi-konkav, falls die Niveaumengen echt konvex sind, d.h. graphisch:



algebraisch:

$$\text{Sei } x^1, x^2 \text{ so daß } f(x^1) = f(x^2) \text{ dann ist } f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq f(x^1)$$

Aus dieser algebraischen Definition wird klar, daß jede konkave Funtion auch quasi-konkav ist, denn für x^1 und x^2 so daß $f(x^1) = f(x^2)$ ist natürlich $f(x^1) = \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$. Umgekehrt ist aber nicht jede quasi-konkave Funktion auch konkav. Dies folgt z.B. daraus, daß jede monotone Funktion quasi-konkav ist. Also folgendes Beispiel: $f(x) = x^3$ ist monoton steigend. Somit ist für alle $\bar{x} \in \mathbb{R}$ $N(f(\bar{x})) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{x} \geq \bar{\mathrm{x}}\}$ konvex, aber x^3 ist für $x \leq 0$ konkav und für $x \geq 0$ konvex.



q

Falls f differenzierbar ist, kann man folgende Kriterien für die Konkavität bzw. Konvexität geben:

$$\begin{array}{lll} \text{Ist } \forall x\ f''(x) & < & 0, \text{ so ist } f \text{ strikt} \quad \text{konkav} \\ & > & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ \text{konvex} \end{array}$$

Und

$$\text{ist } f \begin{array}{l}\text{konkav}\\ \text{konvex}\end{array}, \text{ dann ist } f''(x) \begin{array}{l}\leq 0\\ \geq 0\end{array}$$

Dem aufmerksamen Leser fällt auf, daß in dieser Äquivalenz eine kleine Lücke klafft. Z.B. ist $f(x) = x^2$ strikt konvex, aber $f''(0) = 0$. D.h. es gibt strikt konvexe Funktionen, welche nicht überall eine negative zweite Ableitung zu haben brauchen. Analoges gilt für strikt konkave Funktionen.

1.3 Mehrdimensionale Funktionen:

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Die obigen Definitionen übertragen sich völlig analog auf diesen Fall:

f ist konkav (konvex), falls keine Sekante oberhalb (unterhalb) des Graphen liegt. D.h.

$$f \begin{array}{l}\text{konkav}\\ \\ \text{konvex}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{Für alle } x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1), x^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2) \text{ gilt}\\ f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \begin{array}{c}\geq\\ \leq\end{array} \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \ \forall\ \lambda \in [0,1]\end{array}$$

Und Quasi-Konkavität ist wiederum gegeben, falls alle Niveaumengen konvex sind, bzw. falls

$$f(x^1) = f(x^2) \text{ impliziert, daß } f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq f(x^1) \text{ ist.}$$

Eine zweidimensionale konkave Funktion wird z.B. beschrieben durch die Oberfläche eines Tartufo[1] während die Oberfläche einer Obstschale typischerweise konvex ist. Ich erspare mir solche 3-D Darstellungen. Typische zweidimensionale quasi-konkave Funktionen sind durch Nutzenfuntionen mit konvexen Bessermengen oder Produktionsfunktionen mit konvexen Outputniveaumengen gegeben (vgl. Vorlesung). Woran erkenne ich nun mehrdimensionale Konvexität, Konkavität?
Im besten Fall ist die mehrdimensionale Funktion die <u>Summe</u> von eindimensionalen Funktionen. Es gilt:

Die Summe	konkaver	Funktionen ist	konkav.
	konvexer		konvex.

Der Beweis dieser Aussage folgt unmittelbar aus der algebraischen Definition von konvex bzw. konkav. Es sei hier zum besseren Verständnis einmal aufgeschrieben:Sei $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$ mit $f_i(x_i)$ konkav.

[1] Italienische Eisspezialität

Betrachte

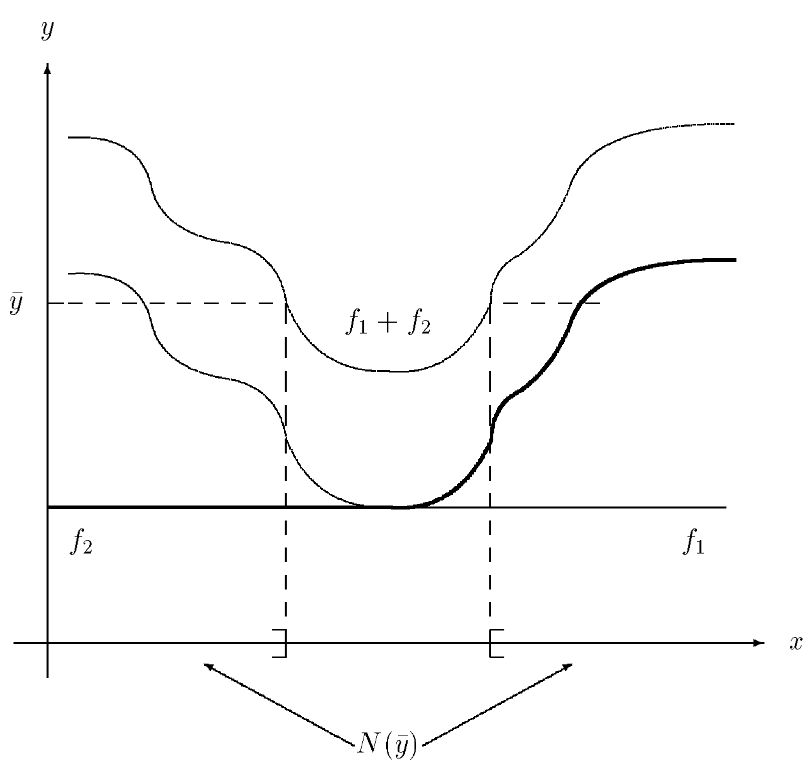
$$\begin{aligned}
f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= f(\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2, \ldots, \lambda x_n^1 + (1-\lambda)x_n^2) \\
&= f_1(\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2) + \ldots + f_n(\lambda x_n^1 + (1-\lambda)x_n^2) \\
&\geq \lambda f_1(x_1^1) + (1-\lambda) f_1(x_1^2) + \\
&\quad \ldots + \lambda f_n(x_n^1) + (1-\lambda) f_n(x_n^2) \\
&= \lambda f_1(x_1^1) + \ldots + \lambda f_n(x_n^1) + (1-\lambda) f_1(x_1^2) + \\
&\quad \ldots + (1-\lambda) f_n(x_n^2) \\
&= \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)
\end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$f(x) = \alpha\sqrt{x_1} + \beta \ln x_2 - \gamma x_3^{-4} \quad \text{für} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

ist konkav.
Leider ist jedoch die Summe von quasi-konkaven Funktionen nicht notwendig quasi-konkav. Man betrachte z.B. die Summe einer monoton fallenden und einer monoton steigenden Funktion wie in der nächsten Abbildung. Jede einzelne Funktion ist quasi-konkav, die Summe aber nicht.



Für manche theoretische Überlegungen ist es wichtig zu wissen, wie sich die Differentialrechnungskriterien für die Konvexität, bzw. Konkavität auf den mehrdimensionalen Fall erweitern lassen. Sei also nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar,dann ist

f strikt	konvex,	falls die Hessematrix von f,	positiv definit ist.
	konkav		negativ

Die Hessematrix einer Funktion f ist die Matrix ihrer zweiten Ableitungen, d.h. die n x n Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1} f(x) & ,\ldots, & \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x) & ,\ldots, & \partial^2_{x_n} f(x) \end{bmatrix}$$

Eine Matrix, H, ist positiv (negativ) definit, falls für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^n$ die reelle Zahl $y^T H y$ positiv (negativ) ist. Kriterien hierfür sind:
Die Eigenwerte von H sind positiv (negativ). Oder:
Die Hauptabschnittsdeterminanten $D_i \quad i = 1, \ldots, n$ sind positiv bzw. im Falle der negativen Definitheit haben sie alternierende Vorzeichen , d.h. $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0 \ldots.$

Beispiel: $f(x_1, x_2) = \ln x_1 + 4\sqrt{x_2}$ für $x_1, x_2 > 0$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}$$

Es ist $(y_1, y_2)H \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -y_1^2 \frac{1}{x_1} - y_2^2 \frac{1}{x_2\sqrt{x_2}} < 0$ für alle $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
Die Eigenwerte sind $-\frac{1}{x_1}$ und $-\frac{1}{x_2\sqrt{x_2}}$, also beide negativ.
$D_1 = -\frac{1}{x_2} < 0$ und $D_2 = -\frac{1}{x_1 x_2\sqrt{x_2}} > 0.$
Hier ist $f(x_1, x_2)$ additiv separabel, sodaß H eine Diagonalmatrix wird. Im allgemeinen Fall sind die angegebenen Kriterien eher mühsam nachzuprüfen.

Beispiel: $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1, x_2} + \sqrt{x_2}$ für $x_1 > 0$ und $x_2 > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{x_2}}{x_1\sqrt{x_1}} & \frac{1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} \\ \frac{1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} & \frac{-(1+\sqrt{x_1})}{x_2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix} \\ D_1 &= \frac{1}{4}\left(\frac{-\sqrt{x_2}}{x_1\sqrt{x_1}}\right) < 0 \\ D_2 &= \frac{1}{16}\frac{1}{x_1 x_2\sqrt{x_1}} > 0 \end{aligned}$$

Also ist f konkav.