Jörg Nikutta
Lehrstuhl Prof. Moldovanu
nikutta@econ.uni-mannheim.de

Das Lagrange-Verfahren

"Kochrezept" für Maximierung unter "="-Nebenbedingungen
Beispiel: Gegeben die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ das Vermögen $\omega = 10$ und Preise für die Güter $p_1 = 1$, $p_2 = 2$.
Das Maximierungsproblem lautet:

$$\max_{x_1, x_2} \quad u(x_1, x_2) \quad \text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = \omega.$$

Maximiere also den Nutzen unter der Budgetbedingung.
Lösungsverfahren:

1. Aufstellen der Lagrange-Funktion. Bringe dazu die Nebenbedingung in "=0"-Form.
$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda) &= \underbrace{u(x_1, x_2)}_{\text{Zielfunktion}} - \lambda \underbrace{(p_1 x_1 + p_2 x_2 - \omega)}_{\text{Nebenbedingung}} \\ &= x_1 x_2 - \lambda (x_1 + 2x_2 - 10) \end{aligned}$$
2. Optimieren der Lagrangefunktion (partiell ableiten nach den Variablen und den Parametern und Ableitungen auf Null setzen):
   a. $\frac{\delta L}{\delta x_1} = x_2 - \lambda \overset{!}{=} 0$
   b. $\frac{\delta L}{\delta x_2} = x_1 - 2\lambda \overset{!}{=} 0$
   c. $\frac{\delta L}{\delta \lambda} = -x_1 - 2x_2 + 10 \overset{!}{=} 0$
3. Lösen des Gleichungssystems:
Aus a. folgt $x_2 = \lambda$. Eingesetzt in b. ergibt sich $x_1 = 2x_2$. Beides in c. eingesetzt und ausgerechnet resultiert in $x_1 = 5$ und $x_2 = 2.5$.
4. Rand-Check
Bis jetzt haben wir nur nach lokalen Maxima im Inneren des relevanten Bereichs gesucht. Eigentlich ist der relevante Bereich alles, wo $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ sind. Durch die Nebenbedingung wird er aber weiter eingeschränkt. Es muß also überprüft werden, ob das Maximum nicht vielleicht am Rand des relevanten Bereichs liegt. Die innere Lösung liefert einen Nutzen von $u(5, 2.5) = 12.5$. Mögliche Randlösungen sind:
$$\begin{array}{lll} x_1 = 0: & \text{Dann ist } x_2 = 5. & u(0,5) = 0 \\ x_2 = 0: & \text{Dann ist } x_1 = 10 & u(10,0) = 0. \end{array}$$
Beide Randlösungen ergeben also keinen größeren Wert in der Zielfunktion, als das (innere) Maximum. Also ist der gefundene Punkt das Maximum auf dem ganzen betrachteten Bereich.