1 Blatt 8, Aufgabe 1

1.1 b) $\mu - \sigma-$Präferenzfunktion

Betrachte die folgende Präferenzfunktion (Nutzenfunktion aus einer Lotterie)

$$\Phi(L) = \mu_L + a\sigma_L^2,$$

wobei μ_L den Erwartungswert der Lotterie L bezeichnet und σ_L die Standardabweichung (somit ist σ_L^2 die Varianz). Der Parameter a beeinflußt also wie stark die Varianz (und damit die Unsicherheit über den Ausgang der Lotterie) in den "Nutzen" eingeht. Für $a < 0$ ist der Entscheider risikoscheu, denn die Varianz verschlechtert seine Einschätzung der Lotterie. Bei $a = 0$ ist er risikoneutral, d.h. die vorhandene Varianz ist ihm egal. Bei $a > 0$ ist er risikofreudig. Das Vorhandensein von Risiko erhöht seine Einschätzung der Lotterie.
Betrachte den Fall $a = -0.01$ für die gegebenen Lotterien L_1 und L_2. Dann ist $\Phi(L_1) = 50 - 0.01 * 2500 = 25$ und $\Phi(L_2) = 36.5 - 0.01 * 72.25 = 35.7775$. Der Entscheider bevorzugt demnach Lotterie L_2 obwohl der Erwartungswert bei dieser Lotterie geringer ist. Dies gilt obwohl der Parameter für die Risikoeinschätzung nur sehr "wenig negativ" ist.
Obwohl diese $\mu-\sigma-$Präferenzfunktionen auf den ersten Blick sehr plausibel erscheinen, so gibt es doch einige Probleme. Betrachte dazu folgendes Beispiel:

Example 1 *Lotterie L_3 zahlt immer 10 Euro aus. Lotterie L_4 zahlt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ 10 Euro aus und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ 20 Euro. Lotterie L_4 ist also* ***NIEMALS*** *schlechter als Lotterie L_3. Darum sagt man auch, dass die Lotterie L_4 die Lotterie L_3 dominiert. Ungünstigstenfalls bekommt man bei Lotterie L_4 auch nur 10 Euro. Angenommen der Risikoparameter a ist "sehr negativ", z.B. -10000, dann kann es sein, dass Lotterie L_3 nach der Präferenzfunktion bevorzugt wird. Lotterie L_3 hat überhaupt keine Unsicherheit in sich. Bei Lotterie L_4 dagegen ist die Varianz $\sigma_{L_4}^2 > 0$. Multipliziert mit einem "sehr negativen" Parameter a, kann*

dies dazu führen, dass

$$\mu_{L_3} - 0 > \mu_{L_4} + a\sigma_{L_4}^2.$$

Daher spricht man auch davon, dass das Dominanzprinzip verletzt ist, denn es wird eine Lotterie bevorzugt, die dominiert wird.

1.1.1 c) Erwartungsnutzen-Prinzip

Es wird der erwartete Nutzen maximiert, d.h. $\max E\left[U\left(X\right)\right]$, wobei U eine Nutzenfunktion ist[1]. Man spricht von

	erwartete Nutzen		Nutzen des Erwartungswerts
Risikoscheu, wenn	$E\left[U\left(X\right)\right]$	$<$	$U\left(E\left[X\right]\right)$
Risikoneutral, wenn	$E\left[U\left(X\right)\right]$	$=$	$U\left(E\left[X\right]\right)$
Risikofreudig, wenn	$E\left[U\left(X\right)\right]$	$>$	$U\left(E\left[X\right]\right).$

Das Sicherheitsäquivalent einer Lotterie ist der Geldbetrag, der, wenn er mit Sicherheit ausgezahlt wird, den Entscheider indifferent zur Lotterie macht. Mit anderen Worten: es ist dem Entscheider egal ob er mit Sicherheit diesen Geldbetrag in den Händen hat oder diese Lotterie spielt. Diese Indifferenz wird ausgedrückt über[2]

$$U\left(S\ddot{a}\left(L\right)\right) = E\left[U\left(X\right)\right].$$

Wenn die Nutzenfunktion U invertierter ist, kann man das Sicherheitsäquivalent auch schreiben als

$$S\ddot{a}\left(L\right) = U^{-1}\left(E\left[U\left(X\right)\right]\right).$$

Allgemein gilt:

[1] Formal: X ist eine Zufallsvariable, die die Auszahlung einer Lotterie L angibt.

[2] Achtung: Ich bin hier nicht ganz konsistent. Das Sicherheitsäquivalent hängt bei mir von L ab, während der erwartete Nutzen aus der Lotterie die Zufallsvariable X verwendet. Stellen Sie sich einfach vor ich wuerde X_L schreiben und mich somit klar auf diese eine Lotterie beziehen. Praktisch verwende ich $U\left(L\right)$ und $U\left(X\right)$ gleichbedeutend.

- bei konkaven Nutzenfunktionen ist der Entscheider risikoscheu und es gilt:

  $Sä\,(L) < E\,[X]$

- bei linearen Nutzenfunktionen ist der Entscheider risikoneutral und es gilt: $Sä\,(L) = E\,[X]$

- bei konvexen Nutzenfunktionen ist der Entscheider risikofreudig und es gilt: $Sä\,(L) > E\,[X]$

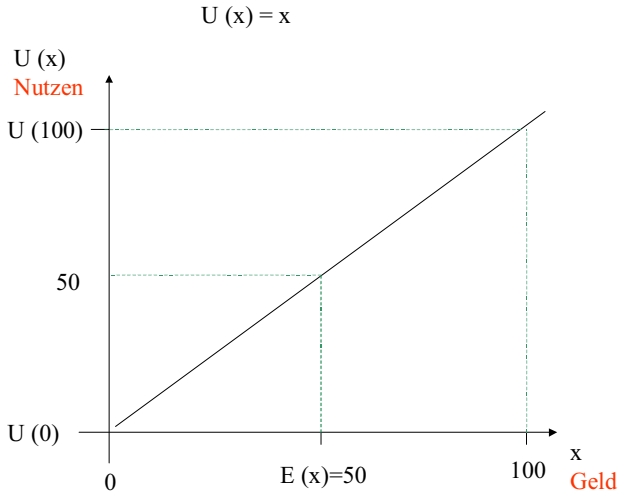
Example 2 *Nutzenfunktion ist* $U\,(x) = x$ *für Lotterie 1 aus Aufgabe 1:*
Der erwartete Nutzen aus der Lotterie wird gegeben über: mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ *gibt es den Nutzen* $U\,(0)$ *und mit Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2}$ *den Nutzen* $U\,(100)$. *Somit ist der erwartete Nutzen aus der Lotterie*

$$\begin{aligned} E\,[U\,(X)] &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}100 \\ &= 50. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert (wie in Aufgabe 1 berechnet) ist 50. Demnach gilt

$$U\,(E\,[X]) = U\,(50) = 50.$$

Bei dieser Nutzenfunktion ist der Entscheider also risikoneutral, da $E\,[U\,(X)] = U\,(E\,[X])$.



Example 3 *Nutzenfunktion ist* $U(x) = \sqrt{x}$*, d.h. die Nutzenfunktion ist konkav. Es gilt*

$$\begin{aligned} E[U(X)] &= \frac{1}{2}U(0) + \frac{1}{2}U(100) \\ &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}10 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$U(E[X]) = U(50) = 7.07.$$

Daher ist

$$E[U(X)] < U(E[X])$$

was bedeutet, dass der Entscheider mit dieser Nutzenfunktion risikoscheu ist. Berechnen wir noch das Sicherheitsäquivalent (also, was müßte man dem Entscheider bar auf die Hand geben, damit er indifferent zu dieser Lotterie ist). Es muss gelten

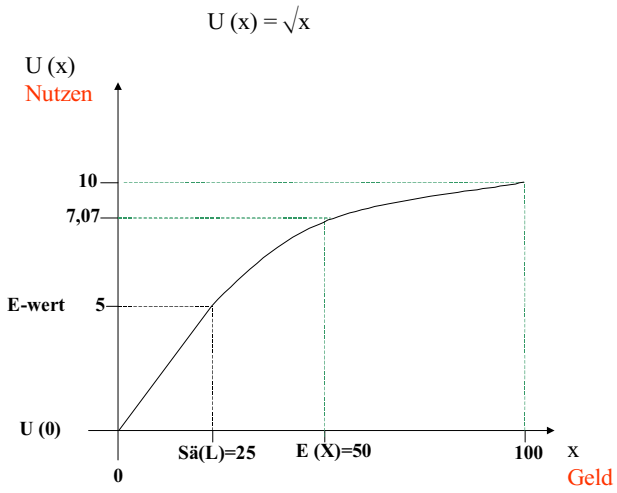
$$\begin{aligned} U(Sä(L)) &= E[U(X)] \\ &= 5. \end{aligned}$$

Also ist die Fragestellung: Wie gross muss man $Sä(L)$ *wählen, damit* $\sqrt{Sä(L)} = 5$*? Die Antwort ist*

$$Sä(L) = 5^2 = 25.$$

Damit ist das Sicherheitsäquivalent kleiner als $E[X]$*. Bei diesem Geldbetrag ist der Entscheider indifferent zur Lotterie, die ja immerhin einen Erwartungswert von 50 hat. - aber mit Risiko behaftet ist, welches der Entscheider ja nicht mag (er ist risikoscheu)*[3]*.*

[3] Sorry, meine Kurven sehen dieses Mal etwas eckig und kantig aus...



Example 4 *Nutzenfunktion ist* $U(x) = x^2$*, d.h. die Nutzenfunktion ist konvex. Es gilt*

$$\begin{aligned} E[U(X)] &= \frac{1}{2}U(0) + \frac{1}{2}U(100) \\ &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}10000 \\ &= 5000. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$U(E[X]) = U(50) = 2500.$$

Daher ist

$$E[U(X)] > U(E[X])$$

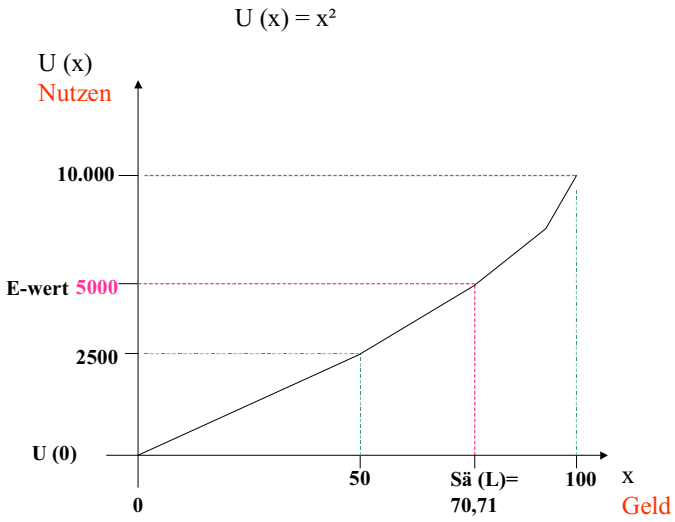
was bedeutet, dass der Entscheider mit dieser Nutzenfunktion risikofreudig ist. Berechnen wir noch das Sicherheitsäquivalent. Es muss gelten

$$\begin{aligned} U(Sä(L)) &= E[U(X)] \\ &= 5000. \end{aligned}$$

Also ist die Fragestellung: Wie gross muss man $Sä(L)$ *wählen, damit* $(Sä(L))^2 = 5000$*? Die Antwort ist*

$$Sä(L) = \sqrt{5000} = 70.71,$$

was grösser als $E[X]$ ist. Bei diesem Geldbetrag ist der Entscheider indifferent zur Lotterie, welche ja nur einen Erwartungswert von 50 hat, aber dafür mit dem geliebten Risiko behaftet ist.



Betrachte Lotterie L_2 aus Aufgabe 1 bei der Nutzenfunktion $U(x) = \sqrt{x}$. Wir hatten $\mathrm{E}[U(X)] = 5$. Es gilt

$$\begin{aligned} E[U(X_{L_2})] &= \frac{1}{2}U(36) + \frac{1}{4}U(49) + \frac{1}{4}U(25) \\ &= \frac{1}{2}6 + \frac{1}{4}7 + \frac{1}{4}5 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Der Entscheider präferiert also Lotterie L_2 da bei der gegebenen Nutzenfunktion der erwartete Nutzen höher ist, d.h.

$$E[U(X_{L_2})] > E[U(X_{L_1})].$$